MATEMATIKA TEKNIK DASAR-I
FUNGSI POLINOM

SEBRIAN MIRDEKLIS BESELLY PUTRA
TEKNIK PENGAIRAN

PENDAHULUAN

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}+\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_0$; $a_n \neq 0$ dan $a_1 \in R$ = konstanta

- Sering sekali kita memakai bilangan dalam system bilangan 10, misalnya saja bilangan:

$1973 = 1.1000 + 9.100 + 7.10 + 3.1$

$1973 = 1.10^3 + 9.10^2 + 7.10^1 + 3.10^0$

Jadi, bila disubstitusi 10 = x, maka $1973 = 1.x^3 + 9.x^2 + 7.x + 3$.

Pada sistem bilangan 5, dimana yang tertinggi adalah bilangan 4:

$1.401 = 1.5^3 + 4.5^2 + 0.5 + 1$

PENDAHULUAN

Pada umumnya kita peroleh

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x^1+a_o$;

Bangun di atas disebut sebagai fungsi polinom (suku banyak) daripada derajtat n, dimana $a_n \neq 0$ dan $a_1 \in R$

Contoh:

Untuk n=3, $a_3=4$, $a_2=-5$, $a_1=1/2$ dan $a_o=\sqrt{2}$, kita dapati

$f(x)=4x^3-5x^2+1/2x+\sqrt{2}$ adalah fungsi suku banyak derajat 3;

$f(x)=mx + n$ adalah suku banyak derajat 1 dengan $a_1=m$ dan $a_o=n$.

Sebagai akibatnya, bila derajat 0 (nol), maka $f(x)=a_o$ (fungsi konstanta $\in$ R)

FUNGSI POLINOM

- Operasi terhadap polinom dapat dilaksanakan, karena, bila f(x) adalah polinom dalm a $\in$R maka pastinya f(a) adalah bilangan real
- Jadi, f(a)$\in$R. Misalkan ada dua fungsi polinom f(x) dan g(x). Kita akan dapat menjumlah atau mengurangi f(x) dan g(x). Misalnya:
  $f(x) = 3x^2-5x+2$
  $g(x)=10x^4-7x^2+5x-4$

Maka

$$\begin{array}{rl} f(x) = & \ldots\ 3x^2 - 5x + 2 \\ g(x) = & 10x^4 + 0.x^3 - 7x^2 + 5x - 4 \\ \hline & 10x^4 + 0.x^3 - 4x^2 + 0.x - 2 \quad + \end{array}$$

Jadi, $f(x) + g(x) = 10x^4 - 4x^2 - 2$, dan

$$\begin{array}{rl} f(x) = & \ldots\ 3x^2 - 5x + 2 \\ g(x) = & 10x^4 + 0.x^3 - 7x^2 + 5x - 4 \\ \hline & -10x^4 - 0.x^3 + 10x^2 - 10x - 6 \quad - \end{array}$$

FUNGSI POLINOM

- Jadi f(x) – g(x) = $-10^4+10x^2-10x+6$
- Tentu dapat pula memperbanyak atau membagi f(x) dan g(x) sebagai berikut

$$\begin{array}{r} 10x^4 + 0.x^3 - 7x^2 + 5x - 4 \\ 3x^2 - 5x + 2 \\ \hline 3x^6 + 0.x^5 - 21x^4 + 15x^3 - 12x^2 \qquad\qquad\qquad \\ - 50x^5 - 0.x^4 + 35x^3 - 25x^2 + 20x \qquad \\ + 20x^4 + 0.x^3 - 14x^2 + 10x - 8 \\ \hline \end{array} +$$

$$f(x) . g(x) = 30x^6 - 50x^5 - x^4 + 50x^3 - 51x^2 + 30x - 8.$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{10x^4 - 7x^2 + 5x - 4}$ adalah fungsi rasional pecah, sedangkan

$\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{10x^4 - 7x^2 + 5x - 4}{3x^2 - 5x - 2}$ dapat kita misalkan, bahwa h(x) hasil bagi-nya, dan s(x) sebagai hasil sisa baginya. Maka tentulah $g(x) = f(x) . h(x) + s(x)$.

FUNGSI POLINOM – DALIL SISA

- Jika polinom $f(x)$ habis dibagi oleh $x-a$, maka $f(x) = 0$, dan sebaliknya.
- $f(x)$ polinom dengan $n \geq 1$ dan $a \in R$
- Dari $f(x) : (x-a)$ akan didapat suatu $h(x)$ dan $s(x)$ adalah polinom, dimana $f(x) = (x-a).h(x)+s(x)$; maka $f(a)=(a-a)\ h(a) + s(a)$;
  jadi $s(a) = f(a) \in R$

FUNGSI POLINOM – Nilai Nol f(x)

- Dari dalil sisa yang diberikan sebelumnya, bahwa bila $f(a) = 0 = s(a)$, maka $f(x)$ dapat diuraikan atas faktor $(x-a)$ dan $h(x)$, sedangkan $f(x)$ habis dibagi oleh $(x-a)$
- Himpunan $\{x|f(x) = 0\}$ adalah himpunan nilai nol fungsi itu
- Jadi, $a \in \{x|f(x)=0\}$ adalah salah satu nilai nol $f(x)$

FUNGSI POLINOM

TEOREMA

- Bila z = a +ib adalah nilai nol fungsi polinom dengan $a_t \in R$, maka z=a-bi juga nilai nol fungsi tersebut; a,b real

TEOREMA

- Bila derajat polinom dengan koefisien real ganjil, maka sekurang-kurangnya ada sebuah nilai nol f(x) yang real.

POLINOM DENGAN a_n BILANGAN BULAT

TEOREMA

- Bila $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_o$, dan $a_i \in B$, $p \in B$ adalah nilai nol $f(x)$ maka p^{n-1} adalah pembagi $a_o (p \neq o)$

BUKTI

Misalkan $p \in B$ adalah nilai nol $f(x)$; maka $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_o = o$

$\therefore a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p = -a_o$; jadi,

$\therefore P(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_1) = -a_o$.

Karena $p \in B$ dan $a_i \in B$, maka faktor ruas kiri semuanya bulat.

Dengan demikian p haruslah pembagi a_o.

MEMBAGI DENGAN METODE HORNER

Misalkan suatu F(x)=(x-b) f(x) + s(x) dengan $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}+\ldots a_1x+a_0$ dan s(x) konstanta.

Dalam (x-b) f(x), perpangkatan x berurutan teratur. Kita jalankan perkalian itu dengan

$$
\begin{array}{l}
a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - b \\
\hline \times \\
a_nx^{n+1} + a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^{n-1} + \ldots + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x \\
-ba_nx^n - b.a_{n-1}x^{n-1} + \ldots - b.a_3x^3\ b.a_2x^2 - b.a_2x^2 - b.a_1x - b.a_0 \\
\hline +
\end{array}
$$

$F(x) = a_nx^{n+1} + (a_{n-1} - b.a_n)x^n + (a_{n-2} - b.a_{n-1})x^{n-1} + \ldots$

$+ (a_1 - b.a_2)x^2 + (a_0 - b.a_1)x + S(x) - b.a_0$ adalah polinom derajat (n+1).

MEMBAGI DENGAN METODE HORNER

Kita misalkan faktornya ialah:

$A_{n+1} = a_n \rightarrow a_n = A_{n+1}$;

$A_n = a_{n-1} - ba_n \rightarrow a_{n-1} = ba_n + A_n = A_n + b\,A_{n+1}$;

$A_{n-1} = a_{n-2} - ba_{n-1} \rightarrow a_{n-2} = ba_{n-1} + A_{n-1} = A_{n-1} + b(A_n + A_{n-1})$;

$A_2 = a_1 - ba_2 \rightarrow a_1 = b\,a_2 + A_2$;

$A_1 = a_0 - ba_1 \rightarrow a_0 = ba_1 + A_1$;

$A_0 = S(x) - ba_0 \rightarrow S(x) = ba_0 + A_0$.

Jadi, bila kita akan mencari f(x) dan S(x), kita jalankan sebagai berikut:

$F(1) = A_{n+1} + A_n + A_{n-1} + \ldots + A_2 + A_1 + A_0$.

Menguraikan f(x) atas Faktor Linear

- Bila polinom f(x), untuk $x = a \rightarrow f(a) = 0$, maka $f(x) = (x-a).g(x)$
- Bila kemudian juga untuk $x = b \rightarrow f(b) = 0$, maka $f(x) = (x-a).r(x)$
- Jadi, bila $f(a) = f(b) = 0 \rightarrow f(x) = (x-a)(x-b).s(x)$, dengan s(x) adalah polinom,
- Kita katakan f(x) diuraikan atas faktor linearnya

Kecuraman dan Garis Singgung f(x)

- Diperhatikan f(x)=ax+b. Wilayah f adalah R; P(r, f(r)) adalah sebuah titik pada kurva f ={(x,y)|y=ax+b}
- Bila $h \in R$ dan $h \neq 0$, maka Q(r+h, f(r+h)) adalah titik lain pada f.
- Kita lihat, bahwa f(r+h) – f(r) adalah kenaikan ordinat titik pada f, bila r bertambah dengan h > 0
- $\frac{f(r+h)-f(r)}{h}$= adalah tgϕ, dimana ϕ adalah sudut antara tali busur PQ dan sumbu X.
- Perbandingan $\frac{f(r+h)-f(r)}{h}$ dinamai perbandingan diferensi f(x)

Kecuraman dan Garis Singgung f(x)

- Perbandingan tersebut menyatakan tegak atau miringnya f terhadap sumbu X, ialah *slope* (curam) f terhadap sumbu X itu
- *Slope* tersebut akan bertanda positif jika $f(r+h) - f(r) > 0$; jadi, nila $f(r+h) > f(r)$
- *Slope* bertanda negatif, bila $f(r+h) < f(r)$,sedangkan bila $f(r+h) = f(r)$, $\forall h$, maka slope nol di P
- Dalam hal ini dikatakan kurva f // sumbu x.
- Bila garisnya // dengan sumbu y ($\perp$ sumbu x), maka slope garis tersebut tak bisa didefinisikan karena tg $\phi = \sim$

Kecuraman dan Garis Singgung f(x)

DEFINISI

Misalkan f adalah fungsi polinom yang berbentuk

$F(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \ldots + a_2x^2 + a_n x + a_o$

Kecuraman koefisien arah f di r adalah:

$n\, a_n r^{n-1}+(n-1)a_n + r^{n-2} + 2a_2 r + a_1$ dan dinyatakan dengan f'(r); f'(r) adalah turunan pertama f(x) di r

Garis yang melalui (r, f(r)) dengan kecuraman f'(r) dinamai garis singgung di (r,f(r))

Kecuraman dan Garis Singgung f(x)

Contoh

$y = x^2 - x - 4$

x	y
$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$	0
0	-4
1	-4

Nilai nol

$$x^2 - x - 4 = 0$$

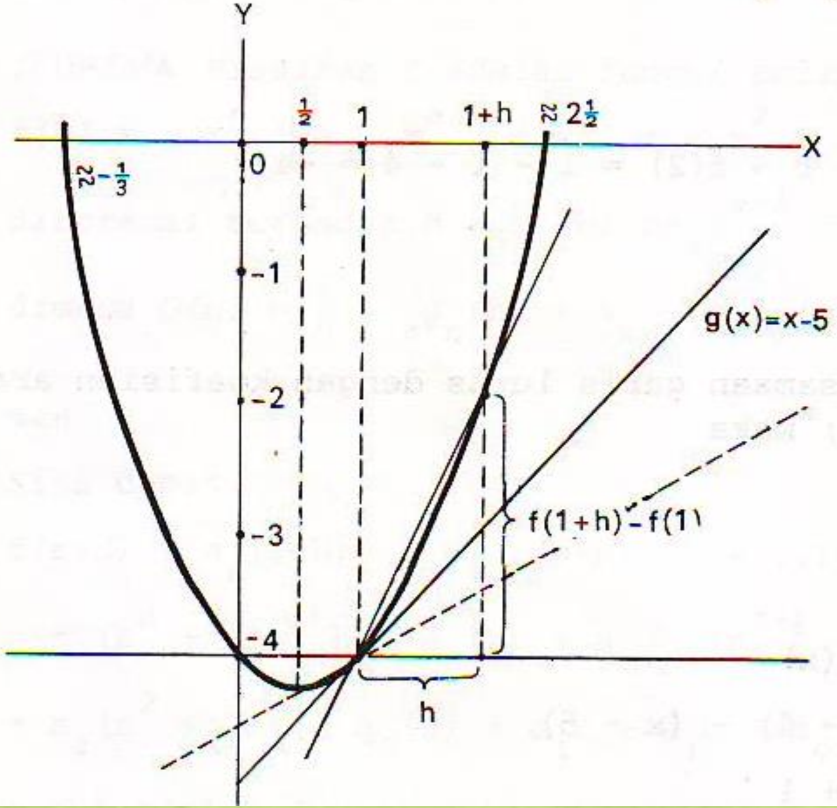
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

Nilai Ekstrim

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}; \quad y = -\frac{D}{4a} = \frac{-17}{4} = -4\frac{1}{4}.$$



Garis singgung di (1, -4)

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(x) = 2.1 - 1 = 1$

$g : y + 4 = 1(x - 1),$

atau $y = x - 5.$